

## Лекция 16. ПРОЕКЦИИ КОНУСА

Конус – тело вращения.

Прямой круговой конус относится к одному из видов тел вращения.

**Коническая поверхность** образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки некоторой кривой **направляющей линии**. Неподвижная точка  $S$  называется вершиной. Основанием конуса служит поверхность образованная замкнутой направляющей.

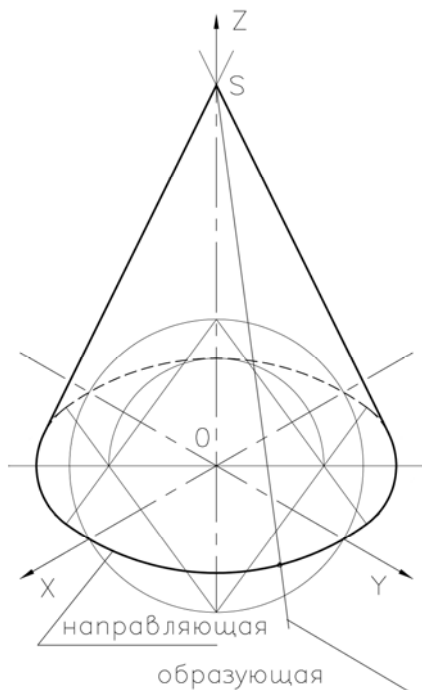


Рис. 1

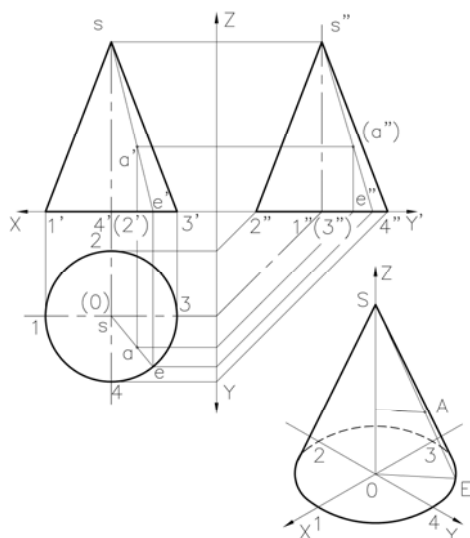


Рис. 2

Конус, основанием которого является окружность, а вершина  $S$  находится на оси перпендикулярной основанию, проходящей через его середину, называется **прямым круговым конусом**. Рис. 1.

Построение ортогональных проекций конуса, приведено на рис. 2.

Горизонтальная проекция конуса представляет собой окружность, равную основанию конуса, а вершина конуса  $S$  совпадает с ее центром. На фронтальную и профильную проекции конус проецируется в виде треугольника, ширина основания которого равна диаметру основания. А высота равна высоте конуса. Наклонные стороны треугольника – проекции крайних (очерковых) образующих конуса.

**Построение конуса в прямоугольной изометрии** приведено на рис. 2.

Построение начинаем с расположения аксонометрических осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , проведя их под углом  $120^\circ$  друг к другу. Ось конуса направим по оси  $OZ$ , и отложим на ней высоту конуса, получив точку  $S$ . Принимая точку  $O$  за центр основания конуса, строим овал, представляющий основание конуса. Затем проводим две наклонные касательные из т.  $S$  к овалу, которые будут крайними (очерковыми) образующими конуса. Невидимую часть нижнего основания конуса выполним штриховой линией.

**Построение точек на поверхности конуса** в ортогональных и аксонометрической проекциях показано на рис. 2, 3.

Если на фронтальной проекции конуса заданы точки  $A$  и  $B$ , то недостающие проекции этих точек можно построить двумя способами.

**Первый способ:** с помощью проекций вспомогательной образующей проходящей через заданную точку.

Дано: фронтальная проекция точки  $A$  – точка  $(a')$ , расположенная в пределах видимой части конуса.

Через вершину конуса и заданную точку  $(a')$  проводим прямую линию до основания конуса и получаем точку  $(e')$  – основание образующей  $s'e'$ .

Далее строим горизонтальную проекцию этой образующей на плоскости  $H$ . Найдем горизонтальную проекцию  $t$ .  $e$  в пределах видимой части окружности основания конуса, проведя проецирующую прямую  $e'e$ , и соединим полученную  $t$ .  $e$  с горизонтальной проекцией вершины конуса  $s$ .

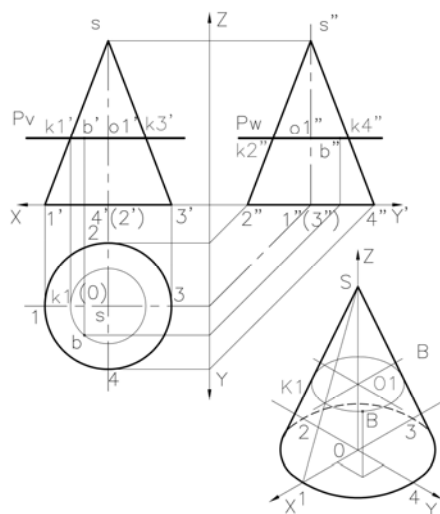


Рис. 3

Так как искомая  $t$ .  $A$  принадлежит образующей  $s'e$  то она должна лежать на ее горизонтальной проекции. Поэтому с помощью линии связи мы переносим ее на линию  $se$  и получаем горизонтальную проекцию  $t$ .  $a$ .

Профильная проекция  $a''$   $t$ .  $A$  определяется пересечением той же образующей  $s''e''$  на профильной проекции с линиями связи, переносящими  $t$ .  $a$  с горизонтальной и фронтальной проекций.

Профильная проекция  $a''$   $t$ .  $A$  в данном случае невидимая, т. к. находится за проекцией крайней образующей  $s''4''$  и обозначается в круглых скобках.

**Второй способ:** с помощью построения проекций сечения конической поверхности горизонтальной плоскостью  $P_v$  параллельной основанию конуса и проходящей через заданную точку  $B$ . Рис. 3.

Дано: фронтальная проекция точки  $B$  –  $t$ .  $b'$ , расположенная в пределах видимой части конуса.

Через  $t$ .  $b'$  проводим прямую,  $P_v$  параллельную основанию конуса, которая является фронтальной проекцией секущей плоскости  $P$ . Эта линия пересекает ось конуса в  $t$ .  $01'$  и крайние образующие в  $t$ .  $k1'$  и  $k3'$ . Отрезок прямой  $k1'k3'$  является фронтальной проекцией сечения конуса через  $t$ .  $b'$ .

Горизонтальной проекцией этого сечения будет окружность, радиус которой определяется на фронтальной проекции как расстояние  $01'k1'$  от оси конуса до крайней образующей.

Так как точка  $b'$  лежит в плоскости сечения, то с помощью линии связи переносим ее на горизонтальную проекцию сечения в пределах видимой части конуса.

Профильная проекция  $t$ .  $b''$  определяется как пересечение профильной проекции сечения  $k2''k4''$  с линией связи, переносящей положение  $t$ .  $b$  с горизонтальной проекции.

### Построение точек на поверхности конуса в аксонометрии.

Строим конус в прямоугольной изометрии. Построение окружности основания конуса в аксонометрии повторяет построение основания цилиндра. (См. раздел 8.2.1.). Отложив на вертикальной оси высоту конуса, проводим две образующие – касательные к овалу основания.

#### Первый способ. Рис. 2.

Строим образующую  $SE$ : на оси  $X$  или  $Y$  откладываем координаты  $X$  или  $Y$  соответствующие  $t$ .  $E$  на горизонтальной проекции и проведем через них линии параллельные оси  $Y$  или  $X$  соответственно. Пересечение их дает положение точки  $E$  на основании конуса.

Соединим  $t$ .  $E$  с вершиной конуса  $S$  и с центром основания  $t$ .  $O$ . Рассмотрим полученный треугольник  $SOE$ : сторона  $OS$  – ось симметрии конуса совпадающая с осью  $Z$ . Сторона  $SE$  – образующая конуса, на которой находится  $t$ .  $A$ . Сторона  $OE$  – основание треугольника составляющая с осью  $Z$  угол  $90^\circ$ .

Высоту  $t$ . А берем на фронтальной проекции по перпендикуляру от основания конуса до  $t$ .  $a'$  и откладываем ее в аксонометрии на оси  $Z$ , то есть на стороне  $OS$ .

Через полученную засечку проводим прямую в плоскости треугольника параллельно основанию треугольника до пересечения с образующей  $SE$ .

Таким образом, переносим высоту положения  $t$ . А на поверхность конуса.

### Второй способ. Рис. 3.

Строим сечение конуса плоскостью параллельной основанию и проходящей через  $t$ . В. Такое сечение конуса есть окружность с радиусом равным отрезку  $OK$  расположенной на высоте равной высоте  $t$ . В. В аксонометрии эта окружность строится в виде эллипса (или заменяющего его овала).

Затем, на осях  $X$  и  $Y$  в основании конуса откладываем соответствующие координаты  $X$  и  $Y$   $t$ . В. взятые с горизонтальной проекции и из точки их пересечения восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с эллипсом сечения, что определит положение  $t$ . В.

### Сечения конуса.

В зависимости от направления в пространстве секущей плоскости, проходящей через конус, в сечении прямого кругового конуса могут получаться различные плоские фигуры:

- А – прямые (образующие)
- Б – гипербола
- В – окружность
- Г – парабола
- Д – эллипс

Конические сечения – эллипс, парабола и гипербола являются лекальными кривыми, которые строятся по точкам принадлежащим кривой сечения.

**А. Сечение конуса вертикальной плоскостью проходящей через его вершину представляет собой прямые.** Рис. 4.

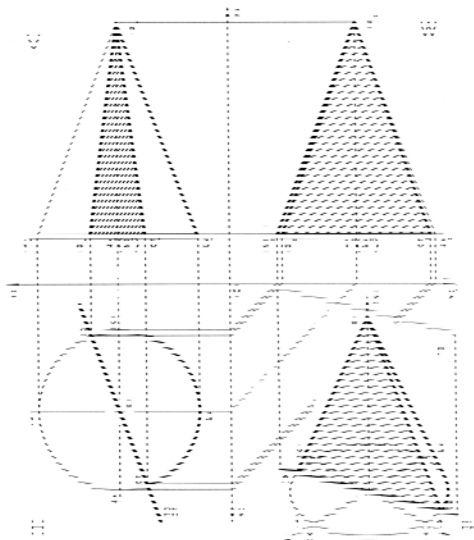


Рис. 4

На горизонтальной проекции конуса через точку  $S$  проводим линию  $Ph$  под произвольным углом к осям  $X$  и  $Y$ , которая является горизонтальной проекцией секущей вертикальной плоскости. Эта линия пересекает окружность основания конуса в двух точках  $a$  и  $b$ , а отрезок  $aob$  является горизонтальной проекцией сечения конуса.

Мысленно отбросим левую часть конуса от линии  $Ph$  и справа от нее получим горизонтальную проекцию усеченного конуса.

Отрезки  $SA$  и  $SB$  – горизонтальные проекции образующих конуса, по которым и проходит секущая плоскость  $Ph$ .

Строим образующие  $SA$  и  $SB$  на фронтальной проекции, перенеся на нее точки  $A$  и  $B$  и соединив полученные точки  $a'$  и  $b'$  с вершиной  $s'$ . Треугольник  $a's'b'$  и будет фронтальной проекцией сечения конуса, а линия  $s'z'$  – крайней образующей конуса.

конуса, а линия  $s'z'$  – крайней образующей конуса.

Аналогично строим профильную проекцию сечения конуса, перенеся точки  $a$  и  $b$  с горизонтальной проекции на профильную и соединив полученные точки  $a''$  и  $b''$  с вершиной конуса  $s''$ . Треугольник  $a''s''b''$  является профильной проекцией сечения конуса, а линия  $s''z''$  есть крайняя образующая конуса.

**Построение аксонометрии.** Рис. 4.

Строим конус в аксонометрии, как описано выше.

Далее с горизонтальной проекции конуса берем координаты по оси  $X$  или  $Y$  для точек  $A$  и  $B$  и переносим их на аксонометрические оси  $X$  или  $Y$ . Через полученные точки проводим вспомогательные линии параллельные осям  $Y$  или  $X$  соответственно. Их пересечение с линией основания конуса позволяет получить точки  $A$  и  $B$  на аксонометрии. Соединив их между собой, и каждую из них с вершиной конуса  $S$ , получим треугольник  $ABS$  являющийся сечением конуса вертикальной плоскостью  $P$ .

**Б. Сечение конуса вертикальной плоскостью, не проходящей через его вершину, представляет собой гиперболу.** Рис. 5.

Строим три проекции конуса - горизонтальную, фронтальную и профильную.

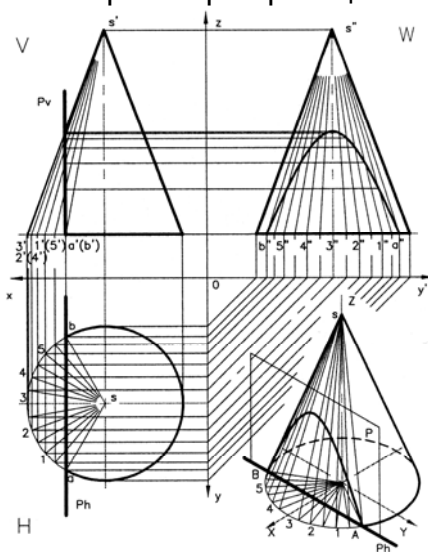


Рис. 5

Если вертикальная секущая плоскость  $P$  не проходит через вершину конуса, то она уже не совпадает с образующими его боковой поверхности, а наоборот – пересекает их.

На горизонтальной проекции конуса проводим секущую плоскость  $Ph$  на произвольном расстоянии от вершины  $S$  и параллельную оси  $Y$ . В общем случае положение секущей плоскости относительно осей  $X$  и  $Y$  может быть любое.

Линия  $Ph$  пересекает окружность основания конуса в двух точках  $a$  и  $b$ . Отрезок  $ab$  этой прямой есть горизонтальная проекция сечения конуса. Часть окружности слева от линии  $Ph$  делим на произвольное количество равных частей, в данном случае на 12, и затем каждую полученную точку на окружности соединяем с вершиной конуса  $s$ . Эти образующие пересекаются секущей плоскостью  $Ph$  и мы получаем ряд точек, которые принадлежат образующим и проекции сечения конуса  $ab$  одновременно.

Строим полученные образующие на фронтальной проекции конуса. Переносим с горизонтальной проекции все точки на основании конуса ( $a, 1, \dots, 5, b$ ) и на фронтальной проекции получаем точки ( $a', 1', \dots, 5', a'$ ) и соединяем их с вершиной конуса  $s'$ . Проводим на фронтальной проекции через точку  $b'$  секущую плоскость  $Pv$  перпендикулярно основанию конуса. Линия  $Pv$  пересекает все образующие, и точки их пересечения принадлежат проекции сечения конуса.

Повторим построение всех образующих на профильной проекции конуса, перенеся на нее точки ( $a, 1, \dots, 5, b$ ) с горизонтальной проекции. Полученные точки ( $a'', 1'', \dots, 5'', b''$ ) соединим с вершиной  $s''$ .

На полученные образующие перенесем с фронтальной проекции точки пересечения соответствующих образующих с секущей плоскостью  $Pv$ . Полученные точки соединим кривой линией, которая представляет собой лекальную кривую – гиперболу.

**Построение аксонометрии.** Рис. 5.

Строим конус в аксонометрии, как описано выше.

Далее с горизонтальной проекции конуса берем координаты по оси X или Y для всех точек  $a, 1, \dots, 5, b$  и переносим их на аксонометрические оси X или Y находим их положение на основании конуса в аксонометрии. Соединяем их последовательно с вершиной конуса S и получаем ряд образующих на поверхности конуса соответствующих образующим на ортогональных проекциях.

На каждой образующей найдем точку ее пересечения с секущей плоскостью P аналогично тому, как это было описано выше (см. построение точек на поверхности конуса, первый способ).

Соединив полученные на образующих точки лекальной кривой, а также точки A и B получим аксонометрическую проекцию усеченного конуса.

### **В Сечение конуса горизонтальной плоскостью.** Рис. 6.

Сечение прямого кругового конуса горизонтальной плоскостью параллельной основанию – есть окружность.

Если рассечь конус на произвольной высоте  $h$  от основания конуса через точку  $a'$  лежащую на его оси  $o's'$  плоскостью параллельной его основанию, то на фронтальной проекции мы увидим горизонтальную линию  $P_v$  являющуюся фронтальной проекцией секущей плоскости, которая образует сечение конуса  $I', II', III', IV'$ . На профильной проекции W вид секущей плоскости и сечение конуса аналогичен и соответствует линии  $P_w$ .

На горизонтальной проекции сечение конуса представляет собой круг в натуральную величину, радиус окружности которого проецируется с фронтальной проекции как расстояние от оси конуса в точке  $a'$  до точки  $I'$ , лежащей на крайней образующей  $1's'$ .

### **Построение аксонометрии.** Рис. 6.

Строим конус в аксонометрии, как опи-

сано выше.

Затем на оси Z откладываем высоту  $h$  точки A от основания конуса. Через точку A проводим линии параллельные осям X и Y и строим окружность в аксонометрии радиусом  $R=a'I'$  взятым с фронтальной проекции.

### **Г Сечение конуса наклонной плоскостью, параллельной образующей.** Рис. 7.

Строим три проекции конуса - горизонтальную, фронтальную и профильную. (см. выше).

На фронтальной проекции конуса проводим секущую плоскость  $P_v$  параллельно очерковой образующей  $s'b'$  на произвольном расстоянии от ее начала на основании конуса через т.  $a'(b')$ . Отрезок  $a's'$  есть фронтальная проекция сечения конуса.

На горизонтальной проекции строим проекцию основания секущей плоскости P через точки  $a, b$ . Отрезок  $ab$  – есть проекция основания сечения конуса.

Далее окружность основания конуса делим на произвольное количество частей и полученные точки соединяем с вершиной конуса  $s$ . Получаем ряд образующих конуса, которые последовательно переносим на фронтальную и профильную проекции. (см. пункт Б).

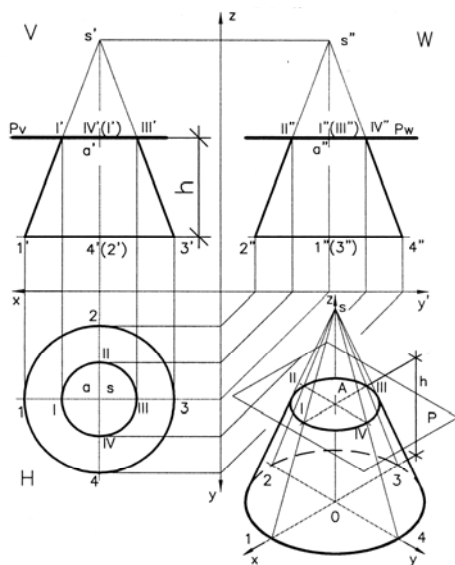


Рис. 6

На фронтальной проекции след секущей плоскости  $P_v$  пересекает образующие и в пересечении дает ряд точек, которые принадлежат как секущей плоскости, так и образующим конуса одновременно.

Переносим линиями связи эти точки на проекции образующих на горизонтальную и профильную проекции.

Полученные точки соединим кривой линией, которая представляет собой лекальную кривую - **параболу**.

**Построение аксонометрии.** Рис. 7.

Строим аксонометрическую проекцию конуса, как описано выше.

Далее с горизонтальной проекции конуса берем координаты по оси  $X$  или  $Y$  для всех точек ( $a, b, 1, \dots, 6$ ) и переносим их на аксонометрические оси  $X$  или  $Y$  соответственно, определив, таким образом их положение на основании конуса в аксонометрии. Соединяем их последовательно с вершиной конуса  $S$  и получаем ряд образующих на поверхности конуса, соответствующих образующим на ортогональных проекциях.

На каждой образующей найдем точку ее пересечения с секущей плоскостью  $P$  аналогично тому, как это было описано выше (см. построение точек на поверхности конуса).

Соединив полученные на образующих точки лекальной кривой, а также точки  $A$  и  $B$  получим сечение конуса в виде параболы.

**Д. Сечение конуса наклонной плоскостью, расположенной под произвольным углом к основанию конуса представляет собой эллипс.** Рис. 8.

СЕЧЕНИЕ КОНУСА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТЬЮ  
ПОСТРОЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ СЕЧЕНИЯ  
И РАЗВЕРТКИ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

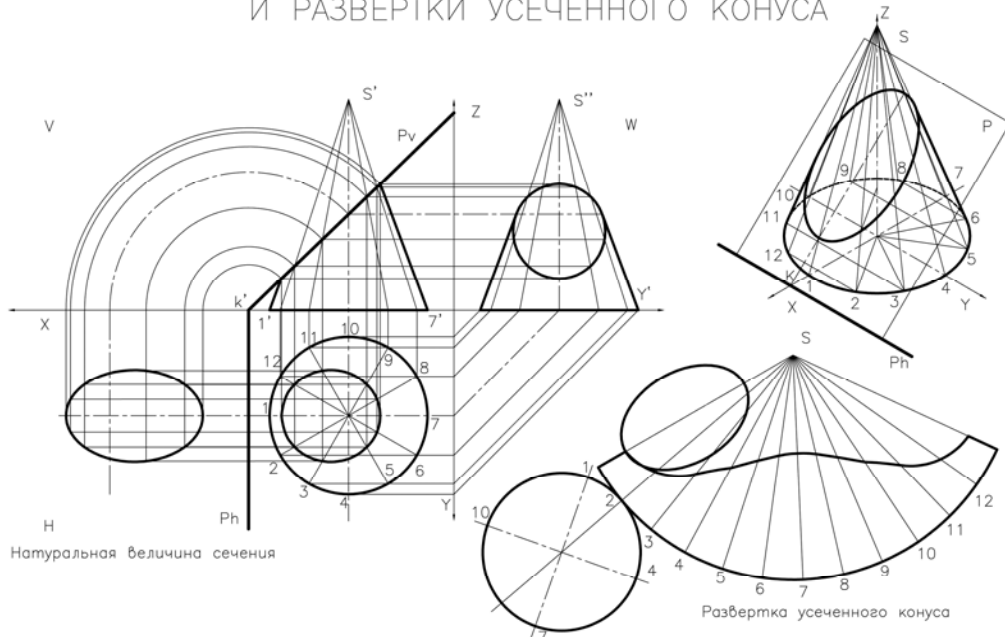


Рис. 8

Строим три проекции конуса - горизонтальную, фронтальную и профильную. (см. выше).

На фронтальной проекции конуса проводим линию секущей плоскости  $P_v$  под произвольным углом к основанию конуса.

На горизонтальной проекции, окружность основания конуса делим на произвольное количество равных частей ( в данном случае на 12) и полученные точки соединяем с вершиной конуса  $S$ . Получаем ряд образующих, которые с помощью линий связи, последовательно переносим на фронтальную и профильную проекции.

На фронтальной проекции секущая плоскость  $P_v$  пересекает все образующие, и полученные точки их пересечения принадлежат одновременно и секущей плоскости и боковой поверхности конуса, являясь фронтальной проекцией искомого сечения.

Переносим эти точки на горизонтальную проекцию конуса.

Затем строим и профильную проекцию сечения конуса (см. выше), соединяя полученные точки лекальной кривой, которая представляет собой **эллипс**.

#### **Построение натуральной величины сечения.**

Лекальные кривые (эллипсы) на горизонтальной и профильной проекции представляют собой искаженные изображения сечения конуса.

Истинная (натуральная) величина сечения получается путем совмещения секущей плоскости  $P$  с горизонтальной плоскостью проекций  $H$ . Все точки сечения конуса на фронтальной проекции переносим на ось  $X$  при помощи циркуля, поворачивая их вокруг точки  $k'$ . Далее, на горизонтальной проекции, линиями связи, параллельными оси  $Y$  продолжаем их до пересечения их с линиями связи, взятыми с горизонтальной проекции соответствующих точек. Пересечение горизонтальных и вертикальных линий связи соответствующих точек позволяет получить точки, принадлежащие натуральной величине сечения. Соединив их лекальной кривой, мы получим эллипс натуральной величины сечения конуса.

#### **Построение аксонометрии усеченного конуса. Рис. 8.**

Построение аксонометрии усеченного конуса выполняется путем нахождения точек принадлежащих сечению конуса любым из описанных выше способов (см. выше).

#### **Построение развертки поверхности усеченного конуса. Рис. 8.**

Предварительно построим развертку боковой поверхности не усеченного конуса. Задаемся положением т.  $S$  на листе и проводим из нее дугу радиусом равным натуральной величине длины образующей конуса (например,  $s'1'$  или  $s'7'$ ). Задаемся положением т. 1 на этой дуге. Последовательно откладываем от нее столько одинаковых отрезков (хорд) на сколько частей разделена окружность основания конуса. Полученные на дуге точки 1, 2, ..., 12, 1 соединяем с т.  $S$ . Сектор  $1S1$  представляет собой развертку боковой поверхности не усеченного конуса. Пристроив к ней в нижней части (например, к т. 2) натуральную величину основания конуса в виде круга взятого с горизонтальной проекции мы получим полную развертку не усеченного конуса.

Для построения развертки боковой поверхности усеченного конуса необходимо определить натуральную величину всех усеченных образующих. На фронтальной проекции все точки сечения перенесем на очерковую образующую  $s'7'$  линиями параллельными основанию конуса. Затем каждый отрезок образующей от т.  $7'$  до соответствующей точки сечения переносим на соответствующую образующую на развертке. Соединив эти точки на развертке, получим кривую линию, соответствующую линии сечения боковой поверхности конуса.

Затем к линии сечения на развертке (например, к образующей  $S_1$ ) при-  
страиваем эллипс натуральной величины сечения полученный на горизон-  
тальной проецирующей плоскости  $H$ .

Развертки поверхности геометрических тел представляют собой чертежи  
– выкройки из бумаги и служат для выполнения макета фигуры.